前

令和6年度学力検査問題

数　　学

120 分 間

注 意 事 項

1. 問題冊子は1ページと2ページである。
2. 解答用紙は 前 11 ，前 12 ，前 13 ，前 14 ，前 15 の5枚である。
3. 解答用紙5枚すべてに受験番号を記入すること。なお，氏名は記入しないこと。
4. 解答は裏面を使用せず，表面の指定された箇所に書くこと。
5. 解答用紙は5枚すべて提出すること。
6. 草案用紙は1枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

1. 関数 $f(x)$ を $f(x)=1+\cos x+x\sin x$ と定める。

(1) $f'(x)=0$ を満たす x を $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲ですべて求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲での $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$ を求めよ。

2. a，b を定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2+2ax+b$ と定める。

(1) $a^2-b=0$ とする。不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{f(x)}dx$ を求めよ。

(2) $a^2-b>0$ とする。$\alpha>\beta$ を満たす定数 α，β に対して $f(x)=(x+\alpha)(x+\beta)$ とする。このとき，α と β を a と b を用いて表せ。

(3) (2)の条件のもとで，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{f(x)}dx$ を a，b を用いて表せ。

3. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n-\dfrac{1}{2}a_n$ を満たすとする。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

4. 複素数平面上の点 z に対し

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

と定める。ただし，i は虚数単位とし，$z \neq -i$ とする。

(1) z を w を用いて表せ。

(2) 点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 w はどのような図形を描くか。

(3) 点 w が点 $-1+2i$ を中心とする半径 2 の円上を動くとき，点 z はどのような図形を描くか。

5. t を正の実数とし，4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(4\sqrt{2},0,0)$，$\mathrm{B}(0,1,1)$，$\mathrm{P}(\sqrt{2},3t,-3t)$ を頂点とする四面体を考える。また，辺 AP を 2 : 1 に内分する点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の両方に垂直であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直となる t の値 t_0 を求めよ。

(3) (2)の t_0 に対して，$t=t_0$ とする。四面体 OABP の体積を求めよ。

[解答例]

1. (1) $f(x) = 1 + \cos x + x\sin x$ より，$f'(x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x$ を得る。よって $f'(x) = 0$ とすると，$x = 0$ または $\cos x = 0$ である。$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$x = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ を得る。

(2) $f'(x) = x\cos x$ だから，$f'(x)$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で正，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ で負の値をとる。よって，$f(x)$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で単調増加，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ で単調減少である。$f(0) = 2$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + \dfrac{\pi}{2}$，$f(\pi) = 0$ だから，$f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $1 + \dfrac{\pi}{2}$，$x = \pi$ で最小値 0 をとる。

(3) 部分積分により

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)dx &= \int_0^{\pi} (1 + \cos x + x\sin x)\,dx \\
&= [x + \sin x]_0^{\pi} + [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\
&= 2\pi + [\sin x]_0^{\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

を得る。

2. (1) $a^2 - b = 0$ より $f(x) = x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ となる。よって，

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int \frac{1}{(x+a)^2}dx = -\frac{1}{x+a} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を得る。

(2) $a^2 - b > 0$ より，

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 2ax + b = (x+a)^2 - (a^2 - b) = (x+a)^2 - (\sqrt{a^2-b})^2 \\
&= (x + a + \sqrt{a^2-b})(x + a - \sqrt{a^2-b})
\end{aligned}$$

を得る。$\alpha > \beta$ より，$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}$，$\beta = a - \sqrt{a^2 - b}$ である。

(3) 部分分数分解より，

$$\frac{1}{(x+\alpha)(x+\beta)} = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{x+\beta}$$

とおくと，

$$1 = A(x+\beta) + B(x+\alpha) = (A+B)x + A\beta + B\alpha$$

を得る。両辺を比べると，$A+B=0$，$A\beta + B\alpha = 1$ だからこれを解いて，$A = -\dfrac{1}{\alpha-\beta}$，$B = \dfrac{1}{\alpha-\beta}$ を得る。これと (2) の結果より，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{f(x)}dx &= \frac{1}{\alpha-\beta}\int\left(\frac{1}{x+\beta} - \frac{1}{x+\alpha}\right)dx \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\log\left|\frac{x+\beta}{x+\alpha}\right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\log\left|\frac{x+a-\sqrt{a^2-b}}{x+a+\sqrt{a^2-b}}\right| + C\end{aligned}$$

を得る。ただし，C は積分定数である。

3. (1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = n+1-\dfrac{1}{2}a_{n+1} - \left(n - \dfrac{1}{2}a_n\right) = 1 - \dfrac{1}{2}a_{n+1} + \dfrac{1}{2}a_n$ を得る。これを整理して，$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{2}{3}$ を得る。

(2) (1) の結果に注意して，$a_{n+1} - \alpha = \dfrac{1}{3}(a_n - \alpha)$ とおくと，$\alpha = 1$ を得る。よって $b_n = a_n - 1$ とおくと数列 $\{b_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。ここで，$S_1 = a_1$ より $1 - \dfrac{1}{2}a_1 = a_1$ だから，$a_1 = \dfrac{2}{3}$ となる。よって，$b_1 = a_1 - 1 = -\dfrac{1}{3}$ であるから，$b_n = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ を得る。以上より，求める一般項は，$a_n = b_n + 1 = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ である。

(3) (2) と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 1$ を得る。

4. (1) $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ より，$w(z+i) = z-i$ である。これを整理すると，$(w-1)z = -i(w+1)$ となる。z について解けば，$z = -i\dfrac{w+1}{w-1}$ を得る。

(2) 仮定より，点 z は $|z| = 1$ を満たす。よって (1) から $1 = \left|-i\dfrac{w+1}{w-1}\right| = \left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|$

となる。両辺に $|w-1|$ をかければ，$|w+1|=|w-1|$ を得る。つまり，点 w は2点1，-1 を結ぶ線分の垂直2等分線を描く。

(3) 仮定より，点 w は $|w-(-1+2i)|=2$ を満たす。$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ を用いると，$\left|\dfrac{z-i}{z+i}+1-2i\right|=2$ を得る。両辺に $|z+i|$ をかけると，$|z-i+(1-2i)(z+i)|=2|z+i|$ となる。これを整理して，$|(1-i)z+1|=|z+i|$ を得る。両辺を二乗すれば，$\{(1-i)z+1\}\{(1+i)\bar{z}+1\}=(z+i)(\bar{z}-i)$ を得る。両辺を展開し整理すれば，$z\bar{z}+z+\bar{z}=0$ を得る。よって，点 z は $1=(z+1)(\bar{z}+1)=(z+1)\overline{(z+1)}=|z+1|^2$ を満たす。これは $|z+1|=1$ と同値である。以上より，点 z は -1 を中心とする半径1の円を描く。

5. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\cdot4\sqrt{2}+1\cdot0+1\cdot0=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0\cdot\sqrt{2}+1\cdot3t+1\cdot(-3t)=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に垂直である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3\sqrt{2},3t,-3t)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\sqrt{2},2t,-2t)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}+3t\cdot2t+(-3t)\cdot(-2t)=12(t^2-1)$ を得る。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直であるから $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より，$12(t^2-1)=0$ を得る。これを満たす正の数 t は1である。よって，$t_0=1$ を得る。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\triangle\mathrm{OAP}$ に垂直であるので，四面体OABPは底面を $\triangle\mathrm{OAP}$，高さを $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ とする三角錐である。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より $\triangle\mathrm{OAP}$ の面積 S は $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ である。ここで，(2) より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-3\sqrt{2},3,-3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2\sqrt{2},2,-2)$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{18+9+9}=6$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{8+4+4}=4$ を得る。従って，$S=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4=12$ となる。さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2}$ だから，求める四面体OABPの体積は $\dfrac{1}{3}\cdot12\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ である。