前

令和5年度学力検査問題

数　　学

120 分 間

注 意 事 項
1. 問題冊子は1ページと2ページである。
2. 解答用紙は 前 11 , 前 12 , 前 13 , 前 14 , 前 15 の5枚である。
3. 解答用紙5枚すべてに受験番号を記入すること。なお，氏名は記入しないこと。
4. 解答は裏面を使用せず，表面の指定された箇所に書くこと。
5. 解答用紙は5枚すべて提出すること。
6. 草案用紙は1枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

1. 関数 $f(x)$ を $f(x)=2xe^x$ と定める。曲線 $y=f(x)$ の点 $(2, f(2))$ における接線を l とする。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 不定積分 $\int f(x)dx$ を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および接線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

2. n を自然数とする。正の実数 x に対し，関数 $f_n(x)$，$g_n(x)$ を

$$f_n(x)=\int_1^x (\log t)^n dt, \qquad g_n(x)=\int_1^x \frac{(\log t)^n}{t}dt$$

と定める。ただし，対数は自然対数とする。

(1) 不定積分 $\int \log x\, dx$ と $\int \frac{\log x}{x}dx$ を求めよ。

(2) $f_{n+1}(x)$ を $f_n(x)$ を用いて表せ。

(3) $g_{n+1}(x)$ を $g_n(x)$ を用いて表せ。

3. n を自然数とする。

(1) すべての自然数 n に対して，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geqq 1+\frac{n}{2}$$

となることを，数学的帰納法によって示せ。

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。

4. iを虚数単位とする。方程式 $z^3=8i$ の解で，実部が正の複素数を α，実部が負の複素数を β，実部が0の複素数を γ とする。

(1) α，β，γ を求めよ。

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ と $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|$ の値を求めよ。

(3) 複素数平面上の3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ が，正三角形であることを示せ。

5. $\triangle\mathrm{OAB}$ が $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2}$ および $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たすとする。t を $0<t<1$ を満たす実数とし，辺 AB を $1-t:t$ に内分する点を C，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を D とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$ を最小にする t の値 t_0 と，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$ の最小値を求めよ。

(3) (2)の t_0 に対して，$t=t_0$ とする。直線 OC と直線 AD の交点を M とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$ の値を求めよ。

[解答例]

1. (1) $f(x) = 2xe^x$ より

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x = (2x+2)e^x$$

接線 l の方程式は, $y - f(2) = f'(2)(x-2)$. $f(2) = 4e^2$, $f'(2) = 6e^2$ なので

$$y - 4e^2 = 6e^2(x-2)$$

整理すると, 接線 l の方程式は,

$$y = 6e^2x - 8e^2$$

(2) 部分積分法より

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx \\ &= (2x-2)e^x + C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標は, $2xe^x = 0$ より, $x = 0$. また, $f(x) > 0 \ \ (x > 0)$, $f(x) < 0 \ \ (x < 0)$. 接線 l と x 軸の共有点の x 座標は, $(6x-8)e^2 = 0$ より, $x = \dfrac{4}{3}$.
次に, 曲線 $y = f(x)$ と接線 l の位置関係を調べる. $g(x) = f(x) - (6e^2x - 8e^2)$ とおく. $g'(x) = (2x+2)e^x - 6e^2$ より $g'(x) > 0 \ \ (x > 2)$, $g'(x) < 0 \ \ (x < 2)$. $g(2) = 0$ なので, $g(x) > 0 \ \ (x \fallingdotseq 2)$. よって, $f(x) > 6e^2x - 8e^2 \ \ (x \fallingdotseq 2)$.
従って, (2) より

$$\begin{aligned}S &= \int_0^2 f(x)dx - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{4}{3}\right) \times f(2) \\ &= [(2x-2)e^x]_0^2 - \frac{4}{3}e^2 \\ &= 2e^2 + 2 - \frac{4}{3}e^2 \\ &= \frac{2}{3}e^2 + 2\end{aligned}$$

2. (1) 部分積分法より

$$\int \log x dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\log x - x + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$\log x = u$ とおくと, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$. 置換積分法より

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C \quad (C\text{は積分定数})$$

(2) 部分積分法より

$$f_{n+1}(x) = \int_1^x (\log t)^{n+1} dt = \left[t(\log t)^{n+1}\right]_1^x - (n+1)\int_1^x t\frac{(\log t)^n}{t} dt$$
$$= x(\log x)^{n+1} - (n+1)f_n(x)$$

(3) $\log t = u$ とおくと, $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$. $t = 1$ のとき, $u = 0$, $t = x$ のとき, $u = \log x$ なので, 置換積分法より

$$g_n(x) = \int_1^x \frac{(\log t)^n}{t} dt = \int_0^{\log x} u^n du = \left[\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right]_0^{\log x}$$
$$= \frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}$$

$g_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n+2}(\log x)^{n+2}$ より, $g_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{n+2}(\log x)g_n(x)$.

3. (1) すべての自然数 n に対して, 以下の不等式が成り立つことを示す.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geqq 1 + \frac{n}{2} \cdots\cdots ①$$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^1 - \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = 0$. よって, ①は, $n = 1$ のときに成り立つ.
k を自然数とする. ①が, $n = k$ のときに成り立つと仮定する. すなわち,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \geqq 1 + \frac{k}{2} \cdots\cdots ②$$

と仮定する.

② より

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - \left(1 + \frac{k+1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k - \frac{k+3}{2}$$
$$\geqq \frac{3}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right) - \frac{k+3}{2}$$
$$= \frac{k}{4} > 0$$

よって, ①は, $n=k+1$ のときにも成り立つ. 従って, 数学的帰納法より, すべての自然数 n に対して, ①が成り立つ.

(2) (1) より, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqq \frac{2}{n+2}$. よって

$$0 \leqq \sqrt{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqq \frac{2\sqrt{n}}{n+2} = \frac{2}{\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}} = 0$ なので, はさみうち法より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$

4. (1) $z^3 = 8i$ の解を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく. $z^3 = r^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta))$ と $8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ より

$$r^3(\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$r^3 = 8$, $r > 0$ より $r = 2$. また, $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数) より $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}$.
よって,

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ 2\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

従って,

$$\alpha = \sqrt{3}+i,\ \beta = -\sqrt{3}+i,\ \gamma = -2i$$

(2) (1) より

$$\begin{cases} \gamma-\alpha = -2i-(\sqrt{3}+i) = -\sqrt{3}-3i \\ \beta-\alpha = (-\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}+i) = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

よって,

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{-\sqrt{3}-3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

従って,

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$
$$= 1$$

以上より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = 1$$

(3) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ より, $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. また, $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = 1$ より, AB=AC. 従って, $\triangle$ABC は正三角形である.

5. (1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく. $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 4$.

一方, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ より

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2$$
$$= 6 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

よって, $4 = 6 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$. 従って, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ で, (1) より $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ なので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = \left\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right\}\cdot\left\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right\}$$
$$= t^2|\vec{a}|^2 + 2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)^2|\vec{b}|^2$$
$$= 4t^2 - 2t + 2$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = t\vec{b}$ より, $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 = 2t^2$. よって,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 = 6t^2 - 2t + 2 = 6\left(t-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{6}$$

$0 < t < 1$ より, $t_0 = \dfrac{1}{6}$ で, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$ の最小値は $\dfrac{11}{6}$.

(3) $\mathrm{OM}:\mathrm{MC}=s:1-s$, $\mathrm{AM}:\mathrm{MD}=r:1-r$ とおく.

(2) より $t=t_0=\dfrac{1}{6}$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{6}\vec{b}$. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{6}s\vec{a}+\frac{5}{6}s\vec{b}\ \cdots\cdot\ ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-r)\vec{a}+\frac{1}{6}r\vec{b}\ \cdots\cdot\ ②$$

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$, $\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ で, $\vec{a}$, $\vec{b}$ は平行でないので, ①, ② より

$$\frac{s}{6}=1-r,\quad \frac{5s}{6}=\frac{r}{6}$$

これを解くと, $s=\dfrac{6}{31}$, $r=\dfrac{30}{31}$. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{6}{31}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots\cdot\ ③$$

(2) より $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=\dfrac{11}{6}$ で, $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=\dfrac{1}{36}|\vec{b}|^2=\dfrac{1}{18}$ なので.

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\frac{11}{6}-\frac{1}{18}=\frac{16}{9}$$

従って, ③ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\frac{6}{31}\times|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{6}{31}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{31}$$