前

令和4年度学力検査問題

数　学

120 分 間

注 意 事 項

1. 問題冊子は1ページと2ページである。
2. 解答用紙は 前 11 ，前 12 ，前 13 ，前 14 ，前 15 の5枚である。
3. 解答用紙5枚すべてに受験番号を記入すること。なお，氏名は記入しないこと。
4. 解答は裏面を使用せず，表面の指定された箇所に書くこと。
5. 解答用紙は5枚すべて提出すること。
6. 草案用紙は1枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

1. a, b を定数とする。関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ は, $x=1$ と $x=\frac{5}{3}$ で極値をとる。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，傾きが1で y 切片が負であるものを l とする。接線 l の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線 l と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

2. 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{2x^4}{1-x^2}$$

と定める。

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{2}{1-x^2}dx$ および $\int_0^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{2}{1-x^2}-f(x)\right\}dx$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq\frac{1}{3}$ のとき，不等式 $0\leqq f(x)\leqq\frac{9}{4}x^4$ が成り立つことを示せ。

(3) 不等式 $0.691<\log 2<0.694$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

3. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=2,\qquad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{4n+2^n}{2^{n+1}}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとする。また，$b_n=2^n a_n$ とおく。

(1) $c_n=b_{n+1}-b_n$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $a_n<a_{n+1}$ を満たす最大の自然数 n を求めよ。

4. 複素数 ω は方程式 $z^3 = 1$ の1でない解とする。

(1) $1 + \omega + \omega^2$ の値を求めよ。

(2) $\omega \neq \omega^2$ を示せ。

(3) 複素数 a, b, c は

$$a + b\omega + c\omega^2 = 0, \qquad a + b\omega^2 + c\omega^4 = 0$$

を満たすとする。$a = b = c$ を示せ。

5. 平面上の互いに異なる3つの点O, A, Bは一直線上にないとする。点Cは $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ を満たすとする。また，線分BCを1:2に内分する点をPとし，線分ACを2:3に内分する点をQとする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + l\vec{b}$ を満たす実数 k, l を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OQ} = r\vec{a} + s\vec{b}$ を満たす実数 r, s を求めよ。

(3) 線分APと線分BQの交点をRとする。$\overrightarrow{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を満たす実数 x, y を求めよ。

令和４年度
室蘭工業大学個別学力考査試験問題解答例

1. 1) $f(x)$ の導関数は $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. $f'(1) = f'(5/3) = 0$ より

$$3 + 2a + b = 0, \quad 3(5/3)^2 + 2a(5/3) + b = 0.$$

よって,

$$\begin{align} 10a + 3b &= -25, \tag{1} \\ 2a + b &= -3. \tag{2} \end{align}$$

ここで (1)-3(2) より $4a = -16$. $\quad \therefore a = -4$. また (1)-5(2) より $-2b = -10$. $\quad \therefore b = 5$.
　以上より, $a = -4$, $b = 5$.
2) $f'(\alpha) = 1$ とおくと $3\alpha^2 - 8\alpha + 5 = 1$. $\quad \therefore (\alpha - 2)(3\alpha - 2) = 0$. $\quad \therefore \alpha = 2,\ 2/3$.
$f(2) = 1$, $f(2/3) = 23/27$ に注意する. これらの点における接線の方程式は, それぞれ

$$\begin{aligned} &y - 1 = x - 2. \therefore y = x - 1. \\ &y - 23/27 = x - 2/3. \therefore y = x + 5/27. \end{aligned}$$

　以上より, 求める接線 l の方程式は $y = x - 1$.
3) l と $y = f(x)$ の交点の x 座標を求めると,

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = x - 1$$

より $x(x-2)^2 = 0$. よって $x = 0,\ 2$. 特に, $x = 2$ では接線 l と曲線 $y = f(x)$ が接することに注意する. よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |f(x) - (x-1)| dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{16}{4} - \frac{32}{3} + 8 \right) - 0 \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

　以上より $S = 4/3$.

2. 1) $\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$ に注意する．これより

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2}{1-x^2}dx = \left[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{3}} = \log 2.$$

また, $\dfrac{2}{1-x^2} - f(x) = \dfrac{2(1-x^4)}{1-x^2} = 2(1+x^2)$ より,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \left\{\frac{2}{1-x^2} - f(x)\right\} dx = 2\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{3}} = 2\left(\frac{28}{81} - 0\right) = \frac{56}{81}.$$

よって、求める定積分の値はそれぞれ $\log 2$, $56/81$.

2) $f'(x) = \dfrac{8x^3(1-x^2) - 2x^4(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{4x^3(2-x^2)}{(1-x^2)^2}$ より, $0 \leq x \leq 1/3$ であれば $f'(x) \geq 0$ であることに注意する．よって $f(0) = 0$ より $0 \leq x \leq 1/3$ において $f(x) \geq 0$. 一方,

$$\frac{9}{4}x^4 - f(x) = \frac{9x^4(1-x^2) - 8x^4}{4(1-x^2)} = \frac{x^4(1-9x^2)}{4(1-x^2)}$$

より, 同様に $\dfrac{9}{4}x^4 - f(x) \geq 0$ が $0 \leq x \leq 1/3$ において成立する．

以上より, $0 \leq x \leq 1/3$ のとき $0 \leq f(x) \leq \dfrac{9}{4}x^4$ が成立する．

3) 1) より $\log 2 = \dfrac{56}{81} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx$. また, 不等式 $0 \leq f(x) \leq \dfrac{9}{4}x^4$ において等号は常には成立しないことに注意する．よって,

$$0 < \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx < \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{4}x^4 dx$$

が成立する．ここで,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{4}x^4 = \frac{9}{20}\left[x^5\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{540}$$

より,

$$\frac{56}{81} < \log 2 < \frac{56}{81} + \frac{1}{540}.$$

$\dfrac{56}{81} = 0.6913\cdots$ より $0.691 < \dfrac{56}{81} < 0.692$.

また, $\dfrac{1}{540} < \dfrac{1}{500} = 0.002$ より,

$$\frac{56}{81} + \frac{1}{540} < 0.692 + 0.002 < 0.694.$$

以上より $0.691 < \log 2 < 0.694$ が成立する．

3. 1) $b_{n+1}-b_n$ を計算すると,

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n &= 2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n \\ &= 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{4n+2^n}{2^{n+1}}\right)-2^na_n \\ &= 2^na_n+4n+2^n-2^na_n \\ &= 4n+2^n. \end{aligned}$$

よって, $c_n=4n+2^n$.

2) $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k$ に注意する. ここで $b_1=2a_1=4$.

$$\begin{aligned} b_n &= 4+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2^k) \\ &= 4+4\sum_{k=1}^{n-1}k+2(1+2+\cdots+2^{n-2}) \\ &= 4+4\frac{n(n-1)}{2}+2\frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\ &= 4+2n(n-1)-2(1-2^{n-1})=2n^2-2n+2^n+2 \end{aligned}$$

以上より, $b_n=2n^2-2n+2^n+2$.

3) $a_n=\dfrac{b_n}{2^n}=\dfrac{n^2-n+1}{2^{n-1}}+1$ より, $a_n<a_{n+1}$ であれば

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^n}-\frac{n^2-n+1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{n^2+2n+1-n-1+1-2n^2+2n-2}{2^n} \\ &= \frac{-n^2+3n-1}{2^n}>0. \end{aligned}$$

$$\therefore n^2-3n+1<0,$$

$$\therefore \frac{3-\sqrt{5}}{2}<n<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3.$$

よって, 条件をみたす最大の n は 2 である.

4. 1) $1-\omega^3=(1-\omega)(1+\omega+\omega^2)=0$ に注意する．仮定より $1-\omega\neq 0$. よって，$1+\omega+\omega^2=0$ を得る．
2) $\omega=\omega^2$ を仮定する．このとき，

$$0=\omega-\omega^2=\omega(1-\omega).$$

$1-\omega\neq 0$ より $\omega=0$ となり $\omega^3=1$ に矛盾する．よって $\omega\neq\omega^2$.
3)

$$a+b\omega+c\omega^2=0, \tag{3}$$
$$a+b\omega^2+c\omega=0 \tag{4}$$

とおく．(3)-(4) より

$$b(\omega-\omega^2)+c(\omega^2-\omega)=0.$$

$\omega-\omega^2\neq 0$ より $b-c=0$. $\quad\therefore b=c$. これを (3) に代入すると

$$a+b(\omega+\omega^2)=0.$$

$1+\omega+\omega^2=0$ より $\omega+\omega^2=-1$. よって

$$a-b=0 \quad \therefore a=b.$$

以上より $a=b=c$.

5. 1) 点 P は線分 $\overline{\mathrm{BC}}$ を $1:2$ に内分するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}).$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b})$. 実数 k, l に対し, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{b}$ と書く表し方は一意的なので, $k = \frac{1}{3}$, $l = 1$.

2) 点 Q は線分 $\overline{\mathrm{AC}}$ を $2:3$ に内分するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}).$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{5}(5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})$. 実数 r, s に対し, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $r\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b}$ と書く表し方は一意的なので, $r = 1$, $s = \frac{2}{5}$.

3) 点 R が線分 $\overline{\mathrm{AP}}$ を $1-p:p$ に内分すれば $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-p)\overrightarrow{\mathrm{OP}}$. よって, 1) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1+2p}{3}\overrightarrow{a} + (1-p)\overrightarrow{b}. \tag{5}$$

また, 点 R が線分 $\overline{\mathrm{BQ}}$ を $q:1-q$ に内分すれば $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = q\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (1-q)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$. よって, 2) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = q\overrightarrow{a} + \frac{5-3q}{5}\overrightarrow{b}.$$

実数 x, y に対し, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ と書く表し方は一意的なので,

$$\frac{1+2p}{3} = q, \quad 1-p = \frac{5-3q}{5}.$$

$$\therefore \begin{cases} 1+2p = 3q, \\ 5p = 3q \end{cases}$$

を得る. これより, $1+2p = 5p$. したがって $p = \frac{1}{3}$. これを (5) に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{5}{9}\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{b}.$$

以上より, $x = \frac{5}{9}$, $y = \frac{2}{3}$.