前

令和3年度学力検査問題

数　学

120 分 間

注 意 事 項

1. 問題冊子は1ページと2ページである。
2. 解答用紙は 前 11 , 前 12 , 前 13 , 前 14 , 前 15 , 前 16 の6枚である。
3. 解答用紙6枚すべてに受験番号を記入すること。なお，氏名は記入しないこと。
4. **問題1**，**問題2**，**問題3** はすべて解答すること。
5. **問題4**，**問題5**，**問題6** から2問を選択し解答すること。
6. **問題4**，**問題5**，**問題6** の解答用紙において，選択する2問の解答用紙では「選択する」を丸で囲み，選択しない問題の解答用紙では「選択しない」を丸で囲むこと。
7. 解答は裏面を使用せず，表面の指定された箇所に書くこと。
8. 解答用紙は，選択しない問題の解答用紙を含めて，6枚すべて提出すること。
9. 草案用紙は1枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

- **上記注意事項の指示に従わない場合には，採点の対象にならないことがある。**

問題1，問題2，問題3はすべて解答すること。

1. a, b, cを実数の定数とし，$c \neq -\dfrac{1}{3}$とする。関数$f(x)$, $g(x)$を

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx, \qquad g(x) = (x+1)^3$$

と定め，$f(x)$は$x = c$, $x = -\dfrac{1}{3}$でそれぞれ極値をとるとする。

(1) a, cをそれぞれbを用いて表せ。

(2) $f(c) = g(c)$とする。このとき，bの値を求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，2曲線$y = f(x)$, $y = g(x)$で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

2. 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$は

$$a_1 = 2, \qquad b_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{7}{3}a_n + \frac{4}{3}b_n + n, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{5}{3}b_n - n$$
$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとする。

(1) $c_n = a_n + b_n$とおく。数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $d_n = a_n - 2b_n$とおく。数列$\{d_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の一般項をそれぞれ求めよ。

3. 円$(x-2)^2 + y^2 = 4$をCとし，点O$(0, 0)$とC上の2点A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)に対して，△OABは正三角形であるとする。ただし，$a_2 > 0$とする。

(1) 点A，Bの座標を求めよ。

(2) C上の点Pに対して，直線OPと直線ABが点Qで交わるとする。点Qが線分ABを1：2に内分するとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

を満たす実数s, tを求めよ。

問題4，問題5，問題6から2問を選択し解答すること。

4. 自然数 n に対して，関数 $g_n(x)$ を

$$g_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

と定める。e を自然対数の底とする。

(1) $x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x$ となることを示せ。

(2) $x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ となることを示せ。

(3) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n に対して，

$$e^x > g_n(x)$$

となることを，数学的帰納法によって示せ。

5. r を正の実数とし，円 $x^2 + y^2 = r^2$ を C とする。

(1) C 上の点 $\left(\dfrac{1}{2}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ を求めよ。

(3) (1)で求めた l と x 軸および C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

6. i を虚数単位とする。複素数 $3 + \sqrt{3} + (1 - 3\sqrt{3})i$ が表す複素数平面上の点をAとし，点Aを原点Oを中心として角 θ だけ回転した点をBとする。ただし，$0 \leqq \theta < \pi$ とする。さらに，点Bを表す複素数を $a + bi$ とする。ここで，a，b は実数である。

(1) a，b を θ を用いて表せ。

(2) 複素数平面上の3点O(0)，B$(a + bi)$，C$(3 + i)$ が一直線上にあるとする。このとき，θ の値を求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，△ABCの面積 S を求めよ。

【解答例】

1. (1) $f'(x)=6x^2+2ax+b$, $f'(c)=f'\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$ より

$6c^2+2ac+b=0$, $\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}a+b=0 \qquad \therefore a=1+\dfrac{3}{2}b$

$6c^2+2ac+b=6c^2+(2+3b)c+b=(3c+1)(2c+b)=0$, $c\neq-\dfrac{1}{3}$

$\therefore c=-\dfrac{b}{2}$

(2) $f(c)=g(c)$ より $2c^3+ac^2+bc=c^3+3c^2+3c+1$

$\therefore c^3+(a-3)c^2+(b-3)c-1=0$

(1) より $-\dfrac{b^3}{8}-\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{3}{8}b^3-\dfrac{b^2-3b}{2}-1=0$

$\therefore b^3-4b^2+6b-4=0 \qquad \therefore (b-2)(b^2-2b+2)=0$

b は実数だから $b=2$

(3) $f(x)=g(x)$ を解けば, $f(x)-g(x)=x^3+x^2-x-1=(x+1)^2(x-1)$ より $x=-1,\ 1$ である．よって $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は点 $(-1,0)$, $(1,8)$ で交わる．$y=f(x)-g(x)=x^3+x^2-x-1$ の導関数は $y'=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$ だから $x<-1$ のとき $f(x)<g(x)$, $-1\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$, $1<x$ のとき $f(x)>g(x)$ である．よって $-1\leqq x\leqq 1$ のとき $y=f(x)$, $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めればよく, それは

$$\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)dx \quad =\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$

である．以上より, 求める面積は $\dfrac{4}{3}$ である．

2. (1) $c_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}=3a_n+3b_n=3c_n$, $c_1=3 \qquad \therefore c_n=3^n$

(2) $d_{n+1}=a_{n+1}-2b_{n+1}=a_n-2b_n+3n=d_n+3n$, $d_1=0$

$n\geqq 2$ ならば

$$d_n=d_1+\sum_{k=2}^{n}(d_k-d_{k-1})=3\sum_{k=2}^{n}(k-1)=3\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{3n(n-1)}{2}$$

$\therefore d_n=\dfrac{3n(n-1)}{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$

(3) $2c_n+d_n=3a_n \qquad \therefore a_n=2\cdot 3^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2}$

$c_n-d_n=3b_n \qquad \therefore b_n=3^{n-1}-\dfrac{n(n-1)}{2}$

3. (1) ${a_1}^2-4a_1+{a_2}^2=0$, ${b_1}^2-4b_1+{b_2}^2=0$, ${a_1}^2+{a_2}^2={b_1}^2+{b_2}^2$ より

$a_1=b_1$　よって $a_1:a_2=\sqrt{3}:1$　　$\therefore a_1=\sqrt{3}a_2$

$3{a_2}^2-4\sqrt{3}a_2+{a_2}^2=0$ より $a_2=\sqrt{3}$, $a_1=3$

$b_1=a_1=3$, ${b_1}^2-4b_1+{b_2}^2=0$, $a_2>b_2$ より, $b_2=-\sqrt{3}$

$\therefore (a_1, a_2)=(3, \sqrt{3})$, $(b_1, b_2)=(3, -\sqrt{3})$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$ より点 Q の座標は $\left(3, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

点 P の座標は $\left(3k, \dfrac{\sqrt{3}}{3}k\right)$ $(k>0)$ としてよい. 点 P は C 上の点だから

$9k^2-12k+\dfrac{1}{3}k^2=0$　　$\therefore k=\dfrac{9}{7}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{9}{7}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{6\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}$　したがって $s=\dfrac{6}{7}$, $t=\dfrac{3}{7}$

4. (1) $f(x)=e^x-(1+x)$ とおく. $x>0$ とする.

$f'(x)=e^x-1>0$ より $f(x)>f(0)=0$　　$\therefore e^x>1+x$

(2) $g(x)=e^x-(1+x+\dfrac{1}{2}x^2)$ とおく. $x>0$ とする.

$g'(x)=e^x-1-x>0$ より $g(x)>g(0)=0$　　$\therefore e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

(3) $h_n(x)=e^x-1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k$ とおく. $x>0$ とする. 整数 m は $m\geqq 2$ であるとし, $h_{m-1}(x)>0$ であるとする. $n=m$ のとき,

$h'_m(x)=e^x-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}=h_{m-1}(x)>0$ より

$h_m(x)>h_m(0)=0$　よって, 数学的帰納法により $h_n(x)>0$ である.

$\therefore e^x>g_n(x)$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

5. (1) C 上の点 $(x,\,y)$ $(y \fallingdotseq 0)$ における接線の傾きは $-\dfrac{x}{y}$ だから l の方程式は

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}r\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}r \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}r$$

(2) $$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta=r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi r^2}{2}$$

(3) C と直線 $x=\dfrac{1}{2}r$ および x 軸で囲まれた部分の面積を求める．

$$\int_{r/2}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta=r^2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore\ \int_{r/2}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)r^2$$

l と直線 $x=\dfrac{1}{2}r$ および x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r\left(2r-\frac{1}{2}r\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$$

$$\therefore\ S=\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)r^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)r^2$$

6. (1) 仮定から $\quad a+bi=(\cos\theta+i\sin\theta)(3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i)$

$\therefore\ a=(3+\sqrt{3})\cos\theta-(1-3\sqrt{3})\sin\theta,\ b=(1-3\sqrt{3})\cos\theta+(3+\sqrt{3})\sin\theta$

(2) $a+bi=k(3+i)$ としてよい．$a=3k,\ b=k$ より

$(3+\sqrt{3})\cos\theta-(1-3\sqrt{3})\sin\theta=3(1-3\sqrt{3})\cos\theta+3(3+\sqrt{3})\sin\theta$

整理して $10\sqrt{3}\cos\theta-10\sin\theta=0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\sin^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$\sin\theta \geqq 0$ より $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$

(3) $a=(3+\sqrt{3})\cos\dfrac{\pi}{3}-(1-3\sqrt{3})\sin\dfrac{\pi}{3}=6$

$b=(1-3\sqrt{3})\cos\dfrac{\pi}{3}+(3+\sqrt{3})\sin\dfrac{\pi}{3}=2$

よって，点 C は線分 OB の中点である．△OAB の面積は

$\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6^2+2^2}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{3}=10\sqrt{3} \qquad \therefore\ S=5\sqrt{3}$