前

2020年度学力検査問題

数　　学

120 分 間

注 意 事 項

1. 問題冊子は１ページと２ページである。
2. 解答用紙は 前 11 , 前 12 , 前 13 , 前 14 , 前 15 の５枚である。
3. 解答用紙５枚すべてに受験番号を記入すること。なお，氏名は記入しないこと。
4. 解答は裏面を使用せず，表面の指定された箇所に書くこと。
5. 解答用紙は５枚すべて提出すること。
6. 草案用紙は１枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

1. a，bを定数とし，$a>0$とする。関数$f(x)$を

$$f(x)=x^3-ax^2+bx+a^2-2$$

と定める。また，曲線$y=f(x)$上の点$(1,2)$における接線lの傾きを4とする。

(1) a，bの値を求めよ。

(2) 曲線$y=f(x)$と接線lの，点$(1,2)$以外の共有点の座標を求めよ。

(3) 曲線$y=f(x)$と接線lで囲まれた部分の面積Sを求めよ。

2. 関数$f(x)$を

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(2x+1)(x^2+x+1)}$$

と定める。

(1) $f(x)=\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$が成り立つように，定数$a$，$b$，$c$の値を定めよ。

(2) 不定積分$\int f(x)dx$を求めよ。

(3) 定積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\sin(2x)dx$の値を求めよ。

3. kを正の整数とする。各項が正の数である数列$\{a_n\}$は

$$a_1=e^2,\quad a_{n+1}=e\cdot(a_n)^k \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとする。ただし，eは自然対数の底とする。

(1) $b_n=\log a_n$とおくとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

4. 方程式 $z^2=2+\sqrt{5}\,i$ の2つの解を α, β とする。ただし，i は虚数単位とし，α の実部は正の実数とする。

(1) $2+\sqrt{5}\,i$ の極形式を

$$2+\sqrt{5}\,i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とするとき，r, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ の値を求めよ。

(2) α, β を求めよ。

(3) 複素数平面上で α, β を表す点をそれぞれ A, B とする。AB を一辺とする正三角形 ABC の頂点 C を表す複素数を γ とする。このとき，γ をすべて求めよ。

5. 3点 A(2, −1, 1), B(−2, 1, 1), C(0, −1, 2) の定める平面を α とする。

(1) 平面 α 上に点 P(0, y, 3) があるとき，y の値を求めよ。

(2) 原点 O から平面 α に下ろした垂線と平面 α との交点 H の座標を求めよ。

［解答例］

1. ⑴　$f(1)=2$ より $1-a+b+a^2-2=2$

整理して $a^2-a+b=3 \cdots\cdots$ ①

$f'(1)=4$ より $f'(x)=3x^2-2ax+b$ なので $3-2a+b=4$

整理して $-2a+b=1 \cdots\cdots$ ②

①，② より $a^2+a-2=(a+2)(a-1)=0$ である。

$a>0$ より $a=1$ である。

よって　　$a=1,\ b=3\ \cdots\cdots$ 答

⑵　接線 l の方程式は $y-2=4(x-1)$

整理して $y=4x-2$ である。

よって，$y=f(x)=x^3-x^2+3x-1$ と接線 l との共有点の x 座標は，方程式 $x^3-x^2+3x-1=4x-2$ すなわち $x^3-x^2-x+1=0$ の解である。

これを解くと $(x-1)^2(x+1)=0$ より $x=1,\ -1$ である。

よって　　点 $(1,2)$ 以外の共有点の座標は $(-1,-6) \cdots\cdots$ 答

⑶　$f(x)-(4x-2)=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$ より区間 $[-1,1]$ において $f(x) \geqq 4x-2$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx = 2\int_0^1(-x^2+1)dx \\ &= 2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって　　$S=\dfrac{4}{3} \cdots\cdots$ 答

２．(1)

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-2}{(2x+1)(x^2+x+1)} &= \frac{a}{2x+1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}\\ &= \frac{a(x^2+x+1)+(2x+1)(bx+c)}{(2x+1)(x^2+x+1)}\\ &= \frac{(a+2b)x^2+(a+b+2c)x+a+c}{(2x+1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

より $a+2b=1,\ a+b+2c=1,\ a+c=-2$ であるから，これを解いて

$a=-3,\ b=2,\ c=1\cdots\cdots$ 答

(2)　(1)と $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より

$$\begin{aligned}\int f(x)\ dx &= \int \frac{-3}{2x+1}\ dx+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\ dx\\ &= -\frac{3}{2}\log|2x+1|+\log(x^2+x+1)+C\end{aligned}$$

（C は積分定数）$\cdots\cdots$ 答

(3)　$\cos^2 x=t$ と置くと，$\dfrac{dt}{dx}=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$ であり，

$x=0$ のとき $t=1$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t=0$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\sin(2x)\ dx &= \int_1^0 -f(t)\ dt\\ &= \int_0^1 f(t)\ dt\\ &= \left[-\frac{3}{2}\log|2x+1|+\log(x^2+x+1)\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{2}\log 3\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ 答

3． ⑴　条件より $\log a_{n+1} = \log\left(e\cdot(a_n)^k\right) = \log e + k\log a_n$ から

$b_{n+1} = 1 + kb_n$，$b_1 = \log a_1 = 2$ である。

$k = 1$ のとき $b_{n+1} = 1 + b_n$ より $b_n = n + 1$

$k \geqq 2$ のとき $b_{n+1} = 1 + kb_n$ から

$$b_{n+1} - \frac{1}{1-k} = k\left(b_n - \frac{1}{1-k}\right)$$

より

$$b_n - \frac{1}{1-k} = k^{n-1}\left(b_1 - \frac{1}{1-k}\right)$$

よって

$$b_n = k^{n-1}\left(2 - \frac{1}{1-k}\right) + \frac{1}{1-k} = \frac{k^{n-1} - 2k^n + 1}{1-k}$$

以上から，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases} k = 1 \quad \text{のとき} \quad b_n = n + 1 \\ k \geqq 2 \quad \text{のとき} \quad b_n = \dfrac{k^{n-1} - 2k^n + 1}{1-k} \end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{㊎}$$

⑵　⑴と $a_n = e^{b_n}$ より数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases} k = 1 \quad \text{のとき} \quad a_n = e^{n+1} \\ k \geqq 2 \quad \text{のとき} \quad a_n = e^{\frac{k^{n-1} - 2k^n + 1}{1-k}} \end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{㊎}$$

4． ⑴ $|2+\sqrt{5}i|^2=(2+\sqrt{5}i)(2-\sqrt{5}i)=4+5=9$ より $r=3$

$2+\sqrt{5}i=3(\cos\theta+i\sin\theta)$ より $\cos\theta=\dfrac{2}{3},\quad \sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって　$r=3,\quad \cos\theta=\dfrac{2}{3},\quad \sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdots\cdots$ 答

⑵ $z^2=2+\sqrt{5}i$ の解 z を $z=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$ とすると

$$z^2=r_0^2(\cos 2\theta_0+i\sin 2\theta_0)=3(\cos\theta+i\sin\theta)$$

より $r_0^2=3,\ \cos 2\theta_0=\dfrac{2}{3},\ \sin 2\theta_0=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ である。よって $r_0=\sqrt{3}$ となる。
また，

$$\cos^2\theta_0=\frac{1+\cos 2\theta_0}{2}=\frac{5}{6},\quad \sin^2\theta_0=\frac{1-\cos 2\theta_0}{2}=\frac{1}{6}$$

であり，$2\sin\theta_0\cos\theta_0=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より $\cos\theta_0>0,\sin\theta_0>0$
または $\cos\theta_0<0,\sin\theta_0<0$ であるので

$$\cos\theta_0=\sqrt{\frac{5}{6}},\quad \sin\theta_0=\sqrt{\frac{1}{6}}\quad \text{または}\quad \cos\theta_0=-\sqrt{\frac{5}{6}},\quad \sin\theta_0=-\sqrt{\frac{1}{6}}$$

よって

$$\begin{cases}\alpha=\sqrt{3}\left(\sqrt{\dfrac{5}{6}}+\sqrt{\dfrac{1}{6}}i\right)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\\ \beta=\sqrt{3}\left(-\sqrt{\dfrac{5}{6}}-\sqrt{\dfrac{1}{6}}i\right)=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\end{cases}\quad\cdots\cdots \text{答}$$

⑶

$$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)$$

または

$$\gamma-\alpha=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)(\beta-\alpha)$$

である。⑵より代入すると

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-\sqrt{10}-\sqrt{2}i)+\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\mp\frac{\sqrt{30}}{2}i$$

よって　$\gamma=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{30}}{2}i$　または　$\gamma=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{30}}{2}i\ \cdots\cdots$ 答

5． (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 $s,\ t$ が存在する。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-2,y+1,2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,2,0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,0,1)$$

より

$$\begin{cases} -2 &= -4s-2t \\ y+1 &= 2s \\ 2 &= t \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

①を解くと，$t=2,\ s=-\dfrac{1}{2}$ より $y=-2\cdots\cdots$ 答

(2) 点 $\mathrm{H}(x,y,z)$ と置くと $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,y,z)$ であり，H は平面 α 上の点であるので $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 $s,\ t$ が存在する。

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(x-2,y+1,z-1)$$

より

$$\begin{cases} x-2 &= -4s-2t \\ y+1 &= 2s \\ z-1 &= t \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

より

$$-4x+2y=0,\quad -2x+z=0$$

である。よって $y=2x,\ z=2x$ を②に代入すると

$$x-2=-2(y+1)-2(z-1)=-2y-2-2z+2=-4x-4x=-8x$$

よって

$$x=\frac{2}{9},\quad y=\frac{4}{9},\quad z=\frac{4}{9}$$

である。以上から交点 H の座標は $\left(\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9},\dfrac{4}{9}\right)\ \cdots\cdots$ 答