前

平成31年度学力検査問題

数　学

120　分　間

注　意　事　項

1. 問題冊子は1ページと2ページである。
2. 解答用紙は 前 11 , 前 12 , 前 13 , 前 14 , 前 15 の5枚である。
3. 解答用紙5枚すべてに受験番号を記入すること。なお，氏名は記入しないこと。
4. 解答は裏面を使用せず，表面の指定された箇所に書くこと。
5. 解答用紙は5枚すべて提出すること。
6. 草案用紙は1枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

1. a, bを定数とし，関数$f(x)$，$g(x)$をそれぞれ

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-a,\ \ g(x)=4x-5$$

と定める。曲線$y=f(x)$および直線$y=g(x)$をそれぞれC, Lとする。CとLは3つの異なる共有点P, Q, Rをもち，点P, Qのx座標はそれぞれ$x=-2$，$x=1$である。

(1) a, bの値を求めよ。

(2) 点Rのx座標を求めよ。

(3) CとLで囲まれた部分の面積Sを求めよ。

2. a, b, cは定数で，$a>0$，$b>0$および$0\leqq c<2\pi$とする。関数$f(x)$を$f(x)=a\sin(bx+c)$と定める。また，

$$f(0)=-\frac{1}{2},\ \ f'(0)=0,\ \ f''(0)=2$$

とする。

(1) a, b, cの値を求めよ。

(2) 不定積分$\int f(x)dx$を求めよ。また，定積分$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$の値を求めよ。

3. 各項が正の数である数列$\{a_n\}$がある。数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが，定数pを用いて$S_n=pn^2+n$で表されるとする。また，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(3n-1)(2n+3)}=\frac{1}{3}$$

とする。

(1) pの値を求めよ。また，数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$とおくとき，数列$\{b_n\}$の初項から第$n$項までの和$T_n$を求めよ。

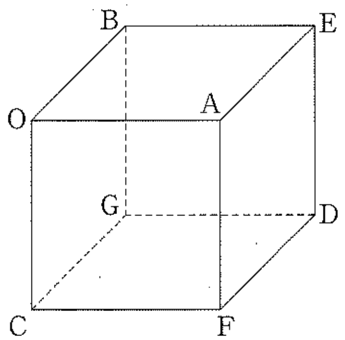
4. 複素数平面上の円 C_1 を，2点 A(-2)，B(3) からの距離の比が $3:2$ である点 P(z) 全体の表す図形とする。

(1) C_1 の中心と半径を求めよ。

(2) i を虚数単位とし，$w = i(z - 4 - 3i)$ とする。点 z が円 C_1 上を動くとき，点 w の描く図形 C_2 は円となる。C_2 の中心と半径を求めよ。

(3) (1)，(2)で求めた円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ Q，R とする。円 D を，直線 QR 上に中心があり，C_1 および C_2 に内接する円とする。D の中心と半径を求めよ。

5. 下の図の立方体 OAEB−CFDG において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。また，3点 A，B，C の定める平面を α とする。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また，s，t を実数とするとき，内積

$$(s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

を求めよ。

(2) 平面 α と直線 OD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

[解答例]

1. ⑴　点PはCとLの共有点だから　　$f(-2)=g(-2)$

$\therefore -8+4a-2b-a=-8-5$　　整理して　　$3a-2b=-5$ ……①

点QはCとLの共有点だから　　$f(1)=g(1)$

$\therefore 1+a+b-a=4-5$　　整理して　　$b=-2$ …………②

①，②より　　$a=-3$

よって　　$a=-3$，$b=-2$ ……答

⑵　CとLの共有点のx座標は，方程式

$$x^3-3x^2-2x+3=4x-5 \qquad \text{すなわち} \qquad x^3-3x^2-6x+8=0$$

の解である。これを解くと

$$(x+2)(x-1)(x-4)=0 \qquad \text{より} \qquad x=-2,\ 1,\ 4$$

このうち$x=-2$，$x=1$はそれぞれ点P，Qのx座標である。

よって　　点Rのx座標は$x=4$ ……答

⑶　$f(x)-g(x)=(x+2)(x-1)(x-4)$より

区間$-2 \leqq x \leqq 1$において　　$f(x) \geqq g(x)$

区間$1 \leqq x \leqq 4$において　　$f(x) \leqq g(x)$

$$\therefore S=\int_{-2}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx-\int_{1}^{4}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x^2-6x+8)\,dx-\int_{1}^{4}(x^3-3x^2-6x+8)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-3x^2+8x\right]_{-2}^{1}-\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-3x^2+8x\right]_{1}^{4}$$

$$=(\text{中略})=\frac{81}{2}$$

よって　　$S=\dfrac{81}{2}$ ……答

2．(1)　$f(x)$ の導関数および第２次導関数は

$$f'(x) = ab\cos(bx+c),\ f''(x) = -ab^2\sin(bx+c)$$

また，$f(0) = -\dfrac{1}{2}$ より　$a\sin c = -\dfrac{1}{2}$ ……①

$f'(0) = 0$ より　$ab\cos c = 0$ ……②

$f''(0) = 2$ より　$-ab^2\sin c = 2$ ……③

①，③ より　$-b^2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2$　すなわち　$b^2 = 4$

$b > 0$ だから　$b = 2$

このことと $a > 0$ より，② の両辺を $2a$ で割って　$\cos c = 0$ ……④

$0 \leqq c < 2\pi$ のとき，④ が成り立つのは　$c = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$

$a > 0$ より，これらのうち① に適するのは　$c = \dfrac{3\pi}{2}$

これを① に代入すると　$a = \dfrac{1}{2}$

よって　$a = \dfrac{1}{2},\ b = 2,\ c = \dfrac{3\pi}{2}$ ……答

(2)　(1) より　$f(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$\therefore \int f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C$$
$$= -\frac{1}{4}\sin 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

また

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\Big[\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = -\frac{1}{4}$$

よって

$$\begin{cases} \displaystyle\int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = -\frac{1}{4} \end{cases}$$ ……答

3. (1) 条件より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{pn^2+n}{(3n-1)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{p+\frac{1}{n}}{\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\frac{p}{3\cdot 2}=\frac{p}{6}$$

これが $\frac{1}{3}$ に等しいから　　$p=2$

次に，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$$

$$=n+4n-2-n+1$$

すなわち　　$a_n=4n-1$ …… ①

初項は $a_1=S_1=2\cdot 1^2+1=3$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　一般項は $a_n=4n-1$

よって　　$\begin{cases} p=2 \\ \text{数列 } \{a_n\} \text{ の一般項は } a_n=4n-1 \end{cases}$ …… 答

(2) (1) より

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4(n+1)-1}}=\frac{1}{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+3}}$$

$$=\frac{\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n+3}}{(4n-1)-(4n+3)}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1}\right)$$

だから

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{4k+3}-\sqrt{4k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4k+3}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4k+3}-\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{4k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4n+3}-\sqrt{3}\right)$$

よって　　$T_n=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4n+3}-\sqrt{3}\right)$ …… 答

4. (1) $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=3:2$ だから　$|z-(-2)|:|z-3|=3:2$

よって　$3|z-3|=2|z+2|$

この方程式の両辺を2乗すると

$3^2|z-3|^2=2^2|z+2|^2$　すなわち　$9(z-3)(\overline{z}-3)=4(z+2)(\overline{z}+2)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-7(z+\overline{z})+13=0$

$\therefore (z-7)(\overline{z}-7)=36$　すなわち　$|z-7|^2=6^2$

ゆえに　$|z-7|=6$

この方程式は，点7を中心とする半径6の円を表す。

よって　C_1 の中心は点7，半径は6 $\cdots\cdots$ 答

(2) $z=-iw+4+3i$ だから　$z-7=-iw-3+3i=-i(w-3-3i)$

$|z-7|=6$，$|-i|=1$ だから　$|w-3-3i|=6$

この方程式は，点 $3+3i$ を中心とする半径6の円を表す。

よって　C_2 の中心は点 $3+3i$，半径は6 $\cdots\cdots$ 答

(3) 円 D の中心を $\mathrm{S}(\alpha)$，半径を r とする。

円 D は円 C_1 に内接するから　$\mathrm{QS}+r=6$ $\cdots\cdots$ ①

円 D は円 C_2 に内接するから　$\mathrm{RS}+r=6$ $\cdots\cdots$ ②

①，② より　$\mathrm{QS}=\mathrm{RS}$ $\cdots\cdots$ ③

3点Q，R，Sは一直線上にあるから，③ より点Sは線分QRの中点である。

また，(1)，(2) より点Q，Rはそれぞれ複素数7，$3+3i$ を表す。

$\therefore \alpha=\dfrac{7+(3+3i)}{2}=5+\dfrac{3}{2}i$

2点Q(7)，$\mathrm{S}\left(5+\dfrac{3}{2}i\right)$ 間の距離は

$$\mathrm{QS}=\left|7-\left(5+\frac{3}{2}i\right)\right|=\left|2-\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{2^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$$

したがって，① より

$$r=6-\mathrm{QS}=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$$

よって　D の中心は点 $5+\dfrac{3}{2}i$，半径は $\dfrac{7}{2}$ $\cdots\cdots$ 答

5．(1) 図の立方体において

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0\quad\cdots\cdots ②$

内積の性質から　$(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad\cdots\cdots ③$

①と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c}\\&=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

②より，右辺の値は0である。すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0\quad\cdots\cdots ④$

①と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b}\\&=|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

②より，右辺の値は0である。すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0\quad\cdots\cdots ⑤$

③，④，⑤より　$(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$

よって　$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\\(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0\end{cases}\quad\cdots\cdots$ 答

(2) △ABCの重心をPとすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(1)より$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$だから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

よって，点Pは直線OD上にある。

点Pは△ABCの重心だから，平面α上にある。

平面αと直線ODは1点で交わるから，点Hは点Pに一致する。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\quad\cdots\cdots$ 答