

前

平成30年度学力検査問題

数 学

120 分 間

注 意 事 項

1. 問題冊子は1ページと2ページである。
2. 解答用紙は 前 11 , 前 12 , 前 13 , 前 14 , 前 15 の5枚である。
3. 解答用紙5枚すべてに受験番号を記入すること。なお、氏名は記入しないこと。
4. 解答は裏面を使用せず、表面の指定された箇所に書くこと。
5. 解答用紙は5枚すべて提出すること。
6. 草案用紙は1枚である。計算などに利用し持ち帰ること。

1. a を定数とする。関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = x^3 + (2a - 1)x^2 - x - a, \quad g(x) = x^2 + (a + 1)x - 3$$

と定める。また、関数 $f(x)$ は $x = \frac{a}{3}$ で極値をとり、 $f(a) = g(a)$ とする。

- (1) a の値を求めよ。
(2) 曲線 $y = f(x)$ と放物線 $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

2. 正の実数 x に対し、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

と定める。また、曲線 $y = f(x)$ の変曲点 P における接線を l とする。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
(2) l の方程式を求めよ。
(3) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。また、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および l で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

3. 複素数 z を $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ とおく。ただし、 i は虚数単位とする。また、自然数 n に対し、 z^{n+2} は 1 の 4 乗根、 z^{n+1} は 1 の 3 乗根であるとする。

- (1) $f(x) = x^2 + x + 1$ とおく。このとき $f(z^4)$ の値を求めよ。
(2) $n + 5$ を 12 で割った余り r を求めよ。
(3) z^{n+11} の偏角 θ を求めよ。ただし、 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

4. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{n+3^n a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。

- (1) $b_n = \frac{n}{a_n}$ とおくとき、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5. $\triangle OAB$ が $|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{AB}| = 2$ および $|\vec{OB}| = 2$ を満たすとする。 t を $\frac{1}{2} < t < 1$ を満たす実数とし、辺 AB を $1-t:t$ に内分する点を C 、辺 AB を $t:1-t$ に内分する点を D とする。

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めよ。
- (2) $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = \frac{7}{6}$ とする。このとき、 t の値を求めよ。
- (3) (2)の条件のもとで、 $\triangle OCD$ の面積 S を求めよ。